§7.4* 欧氏空间的子空间.

定义: 若 $V_1 \perp V_2$ 且 $V = V_1 + V_2$, 则称 V_1, V_2 互为**正交补(空间)**.

定理: 欧氏空间的任意子空间的正交补存在且唯一.

证明: 设 V_1 为欧氏空间 V 的一子空间.

存在性: 记 $V_2 := \{ w \in V \mid w \perp V_1 \}$. 下证 V_2 为 V_1 的正交补. 显然 V_2 为子空间且 $V_1 \perp V_2$. 只需证明 $V = V_1 + V_2$. 设 $e_1, \cdots, e_r$ 为 V_1 的标准正交基. $\forall v \in V$, $w := v - \sum_{i=1}^{n} (e_i, v) \cdot e_i$ 则

$$(w, e_j) = (v, e_j) - \sum_{i=1}^{n} (e_i, v)(e_i, e_j) = 0. \quad \forall j = 1, \cdots, r.$$

因此 $w \in V_2$. 从而 $v = \sum_{i=1}^{n} (e_i, v) e_i + w \in V_1 + V_2$.

唯一性: 若 V_2' 也为 V_1 的正交补. 则由 V_2 的构造, 我们有 $V_2' \subseteq V_2$. 由于 $V_1 \oplus V_2 = V = V_1 \oplus V_2'$

$\Rightarrow \dim V_2' = \dim V - \dim V_1 = \dim V_2$. 因此 $V_2' = V_2$.

§7.5* 酉空间

$\mathbb{R}$-线性空间 + 内积 $\Rightarrow$ 欧氏空间

内积 $\Downarrow$ 度量矩阵 $\Downarrow$ 正定矩阵

欧氏空间 $\Downarrow$

正交变换 $\Rightarrow$ 正交矩阵

伴随变换 $\Rightarrow$ 转置

自伴随变换 $\Rightarrow$ 对称矩阵

$\hookrightarrow$ 可对角化！

$\mathbb{C}$-线性空间 + 内积 $\Rightarrow$??

$z \in \mathbb{C} \Rightarrow |z|^2 = \bar{z} z$ $\quad$ $(x \in \mathbb{R},\ |x|^2 = x \cdot x)$

$$\Rightarrow \left(\underset{\overset{\|}{z}}{\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}}, \underset{\overset{\|}{w}}{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}} \right) = \bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2 + \cdots + \bar{z}_n w_n$$

$$= \bar{z}^T w$$

$z^H := \bar{z}^T$ $\qquad$ $A = (a_{ij})_{n\times n} \Rightarrow A^H := (\overline{a_{ji}})_{n\times n}$

共轭转置

$(\lambda z)^H = \bar{\lambda} z^H$ $\qquad$ $(z + z')^H = z^H + z'^H$

定义：V为复线性空间，若$\forall a,b\in V$对应一个复数，记作(a,b)，满足

1) 共轭对称性： $(a,b)=\overline{(b,a)}$

2) 线性性： $(a,\lambda b+\mu c)=\lambda(a,b)+\mu(b,c)$.

3) 正定性： $(a,a)\geq 0$, "=" $\Leftrightarrow$ $a=0$.

则称(a,b)为a和b的内积。定义了内积的复线性空间称为酉空间。

注：$(\lambda a,b)=\bar{\lambda}(a,b)$！可类似定义正定复矩阵。

$$\begin{cases} G=G^H \\ z^H G z\geq 0 \quad \text{"="} \Leftrightarrow z=0 \end{cases}$$

长度（模）$|a|:=\sqrt{(a,a)}$

垂直（正交），标准正交基、Schmit 正交化，正交补

Schwarz 不等式 $|(a,b)|\leq |a|\cdot|b|$

§ 共轭变换（伴随变换）

定义：设$\mathscr{A}$为酉空间V上的一个线性变换，若$\exists!$ V上线性变换$\mathscr{A}^*$满足对$\forall a,b\in V$，有

$$(\mathscr{A}a,b)=(a,\mathscr{A}^*b)$$

则称$\mathscr{A}^*$是$\mathscr{A}$的共轭变换（伴随变换）若$\mathscr{A}$在标准正交基下矩阵为A，则$\mathscr{A}^*$在同一组标准正交基下矩阵为A^H

$\mathcal{U}$ 酉变换 $\Leftrightarrow$ 保持内积

$\Leftrightarrow$ 保持向量模长.

$\Leftrightarrow$ 将标准正交基变为标准正交基

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{U}^* \circ \mathcal{U} = id_V$

$\Leftrightarrow$ 标准正交基下矩阵为酉矩阵. ($U^H U = I_n$ 酉矩阵)

定理: n维酉空间V上的全体酉变换组成的集合 $U(V)$ 在复合作用下构成群.

可观测量

$\mathcal{A}$ 为 Hermite 变换 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ (自伴随)

$\Leftrightarrow (\mathcal{A}a, b) = (a, \mathcal{A}b) \quad \forall a, b \in V$.

$\Leftrightarrow$ A 为 Hermite 矩阵 (i.e. $A^H = A$)

$\mathcal{A}$ 在标准正交基下的矩阵

$\mathcal{A}$ 为规范变换. $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$

$\Leftrightarrow$ A 为规范矩阵 (i.e. $AA^H = A^H A$)

$\Leftrightarrow$ A 酉相似于对角阵.

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 在某标准正交基下为对角阵

推论：设$\mathcal{A}$为酉变换，则

1) $\mathcal{A}$的特征值λ模为1，即存在$\theta\in[0,2\pi)$使得$\lambda=e^{i\theta}$.

2) $\mathcal{A}$在某标准正交基下矩阵为$\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n})$.

证：$\mathcal{A}$在某标准基下矩阵为$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=D$.

$\mathcal{A}=$酉变换 $\Rightarrow$ $D=$酉矩阵 $\Rightarrow$ $D^HD=I$ $\Rightarrow$ $|\lambda_i|=1$.

推论：设$\mathcal{A}$为Hermite变换，则

1) $\mathcal{A}$的特征值为实数

2) $\mathcal{A}$在某标准正交基下矩阵为实对角阵.

证 $\mathcal{A}$在某标准基下矩阵为$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=:D$

$\mathcal{A}=$Hermite $\Rightarrow$ $D^H=D$ $\Rightarrow$ $\overline{\lambda_i}=\lambda_i\ \forall i$ $\Rightarrow$ $\lambda_i\in\mathbb{R}\ \forall i$

推论：反Hermite变换？

直接证明：

$$\left.\begin{aligned}&(\mathcal{A}\xi,\mathcal{A}\xi)=(\lambda\xi,\lambda\xi)=\bar{\lambda}\lambda|\xi|^2\\&\quad\ \,\|\\&(\xi,\xi)=|\xi|^2\end{aligned}\right\}\quad|\lambda|=1$$

$$\left.\begin{aligned}&(\mathcal{A}\xi,\xi)=(\lambda\xi,\xi)=\bar{\lambda}|\xi|^2\\&\quad\ \,\|\\&(\xi,\mathcal{A}\xi)=(\xi,\lambda\xi)=\lambda|\xi|^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\lambda\in\mathbb{R}$$